

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1+9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 6 (ตอนที่ 1/5)

เดลินิวส์

ร่วมกับ



**นักเรียน
บุณทดราบ**

โดยช่วงตั้งแต่ 24 พ.ค.-14 ต.ค. 59 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัสบดี+วันศุกร์

1. ในงานเลี้ยงครั้งหนึ่ง ชายแต่ละคนจะจับมือทักทายกับทุกคนที่มาร่วมงาน ยกเว้น ภรรยาของตนเองและไม่มีการจับมือทักทายกันระหว่างหญิงด้วยกัน ถ้ามีสามี ภรรยา 13 คู่เท่านั้นที่มาร่วมงานครั้งนี้ ใน 26 คนนี้มีการจับมือทักทายกัน ทั้งหมดกี่ครั้ง

- 1) 78
- 2) 185
- 3) 234
- 4) 312

2. เลขโดดในหลักพันของสัมประสิทธิ์ของ $xy^2z^3w^2$ ในรูปกระจายของ $(x + 2y + 3z + 5w)^8$ คืออะไร

- 1) 3
- 2) 4
- 3) 5
- 4) 6

3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\det(B) = 9$, $(CB^{-1}A)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $\det(C) = \frac{r}{s}$ โดยที่ ห.ร.ม. ของ r และ s มีค่าเท่ากับ 1 แล้ว r + s มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 26
- 2) 27
- 3) 28
- 4) 29

4. ให้ $f(n) = 6^n + 8^n$ เมื่อหาร $f(83)$ ด้วย 49 จะมีเศษเหลือเท่ากับเท่าใด

- 1) 33
- 2) 34
- 3) 35
- 4) 36

5. กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 20 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -7
- 2) $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 20 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -7
- 3) $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -20 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -7
- 4) $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -20 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 7

6. ให้ a เป็นค่าคงตัว และ $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \leq a \\ x^2 - 2x, & x > a \end{cases}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 0
- 2) 1
- 3) 2
- 4) 3

7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det[-14(A - B)^{-1}]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) $-\frac{1}{2}$
- 2) 7
- 3) $\frac{1}{2}$
- 4) -7

8. แบ่งลูกบอล 5 ลูกที่แตกต่างกันใส่กล่อง 3 ใบที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้าแต่ละกล่องต้องใส่ลูกบอลอย่างน้อย 1 ลูก

- 1) 150
- 2) 153
- 3) 242
- 4) 243

เฉลย

1. เฉลย 3) 234

ถ้า 26 คนนี้จับมือทักทายกันโดยไม่มีการยกเว้น จะมีการจับมือทักทายกันทั้งหมด $\binom{26}{2} = \frac{26 \cdot 25}{1 \cdot 2} = 325$ ครั้ง ในจำนวนนี้มีการจับมือทักทายกันระหว่างหญิง 13 คน $\binom{13}{2} = 78$ ครั้ง และมีการจับมือกันระหว่างสามีและภรรยาอีก 13 ครั้ง ดังนั้น มีการจับมือกันตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ $325 - 78 - 13 = 234$ ครั้ง

2. เฉลย 4) 6

$(x + 2y + 3z + 5w)^8$ คือ $(x + 2y + 3z + 5w)$ คูณกัน 8 วงเล็บ พจน์ $C \cdot xy^2z^3w^2$ สร้างขึ้นโดยเลือก x จากวงเล็บใดวงเล็บหนึ่งใน 8 วงเล็บ เลือก 2y จาก 2 วงเล็บใน 7 วงเล็บที่เหลือ เลือก 3z จาก 3 วงเล็บใน 5 วงเล็บที่เหลือ และเลือก 5w จาก 2 วงเล็บสุดท้าย

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } C \cdot xy^2z^3w^2 &= \binom{8}{1} \binom{7}{2} \binom{5}{3} \binom{2}{2} (x)(2y)^2(3z)^3(5w)^2 \\ &= 8 \times \frac{7 \times 6}{1 \times 2} \times \frac{5 \times 4}{1 \times 2} \times 1 \times 2^2 \times 3^3 \times 5^2 xy^2z^3w^2 \\ &= 4536000xy^2z^3w^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ $xy^2z^3w^2$ คือ 4536000 ซึ่งมี 6 เป็นเลขโดดในหลักพัน

3. เฉลย 2) 27

$$\det(A) = (1)(5) - (-2)(2) = 9, \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{9}$$

สังเกตว่า $(CB^{-1}A)^{-1} = A^{-1}BC^{-1}$
ดังนั้น $\det[(CB^{-1}A)^{-1}] = \det(A^{-1}BC^{-1}) = \det(A^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(C^{-1})$

$$(4)(5) - (-3)(2) = \frac{1}{9} \times 9 \times \frac{1}{\det(C)}$$

$$\det(C) = \frac{1}{26} = \frac{r}{s}$$

และจะได้ $r + s = 1 + 26 = 27$

4. เฉลย 3) 35

สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคี่ เราอาจเขียน

$$\begin{aligned} f(n) &= (7 - 1)^n + (7 + 1)^n \\ &= \left(7^n - \binom{n}{1}7^{n-1} + \dots - 1\right) + \left(7^n + \binom{n}{1}7^{n-1} + \dots + 1\right) \\ &= 2\left(7^n + \binom{n}{2}7^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-3}7^3 + \binom{n}{n-1}7\right) \\ &= 2 \cdot 49 \left(7^{n-2} + \binom{n}{2}7^{n-4} + \dots + \binom{n}{n-3}7\right) + 14n \end{aligned}$$

และจะได้ $f(83) = 49k + 14(83) = 49k + 1162$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น เศษเหลือที่เกิดจากการหาร $f(83)$ ด้วย 49 เท่ากับเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 1162 ด้วย 49 ซึ่งก็คือ 35

5. เฉลย 2) $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 20 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -7
จาก $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
จะได้ $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
และ $f''(x) = 12x + 6$

ขั้นที่ 1 หาค่าวิกฤติของ $f(x)$

ให้ $f'(x) = 0$

จะได้ $6x^2 + 6x - 12 = 0$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2, 1$$

ขั้นที่ 2 ตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ค่าวิกฤติ

สำหรับค่าวิกฤติ $x = -2$; $f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = 20$

สำหรับค่าวิกฤติ $x = 1$; $f''(1) = 12(1) + 6 = 18$

ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = -7$

6. เฉลย 3) 2

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

$$2a - 4 = a^2 - 2a$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$(a - 2)^2 = 0$$

$$a = 2$$

7. เฉลย 2) 7

$$A - B^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - B^t) = (-2)(-10) - (-1)(8) = 20 + 8 = 28$$

$$\det[-14(A - B^t)^{-1}] = (-14)^2 \det((A - B^t)^{-1})$$

$$= \frac{14^2}{\det(A - B^t)}$$

$$= \frac{14^2}{28}$$

$$= 7$$

8. เฉลย 1) 150

สำหรับลูกบอลแต่ละลูก เลือกที่จะใส่กล่องใบใดใบหนึ่งได้ 3 วิธี ดังนั้น มีวิธีทั้งหมด 3^5 วิธีในการใส่ลูกบอล 5 ลูกลงกล่อง 3 ใบ ซึ่งในจำนวนวิธีเหล่านี้มีบางวิธีที่มีกล่องว่าง เราต้องหักจำนวนวิธีที่มีกล่องว่างออก ถ้าเราเลือกกล่องใดกล่องหนึ่งเป็นกล่องว่างซึ่งทำได้ 3 วิธีแล้วใส่ลูกบอล 5 ลูกลงกล่องใบใดใบหนึ่งใน 2 ใบที่เหลือได้ 2^5 วิธี ในจำนวน 3×2^5 วิธีนี้มีการนับจำนวนวิธีที่มีกล่องว่าง 2 ใบซ้ำ 2 ครั้ง และวิธีใส่ลูกบอลลงกล่องใบใดใบหนึ่งเพียงใบเดียวมี 3 วิธี (กล่องว่าง 2 ใบ) ดังนั้นจำนวนวิธีใส่ลูกบอล 5 ลูกลงกล่องโดยแต่ละกล่องมีลูกบอลอย่างน้อย 1 ลูกมีทั้งหมด $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 = 150$ วิธี